Über die Summen reziproker Reihen*

Leonhard Euler

§1 Schon dermaßen sind die reziproken Reihen der Potenzen der natürlichen Zahlen behandelt und untersucht worden, dass es kaum wahrscheinlich schien, dass über sie irgendetwas Neudes gefunden werden kann. Fast alle die, welche auch immer nämlich über die Summen von Reihen nachgesonnen haben, haben auch nach den Summen der Reihen von dieser Art gesucht und konnten sie dennoch nicht mit irgendeiner Methode auf geeignete Weise ausdrücken. Ich habe also auch schon öfter, nachdem ich verschiedene Summationsmethoden angegeben hatte, diese Reihen sorgsam untersucht und habe dennoch nicht irgendwas anderes erhalten, außer dass ich deren wahre Summe entweder näherungsweise bestimmt habe oder auf Quadraturen höchst transzendenter Kurven zurückgeführt habe; davon habe ich jenes in der unmittelbare gelesenen Dissertation, dieses hingegen vohergehenden geleistet. Ich rede hier aber über die Reihen von Brüchen, deren Zähler 1 sind, die Nenner hingegen etweder Quadrate oder Kuben oder andere Potenzen der natürlichen Zahlen; von dieser sind

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{ etc}$$

ebendso

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\text{ etc}$$

*Orginaltitel: „De summis serierum reciprocarum “, erstmals publiziert in“Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, pp. 123-134 “, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 14, pp. 73 - 86 “ und „Comment. acad. sc. Petrop. 7, ed. nova, Bononiae 1748, pp. 112-123 + 1 diagram [E41a] “ , Eneström-Nummer E41, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Stefan Faldum, im Rahmen des Projektes „Hauptseminar Ëuler WS 2013/14 “

und die gleichen der höheren Potenzen, deren allgemeine Terme in dieser Form $\frac{1}{\chi^n}$ enthalten sind.

§2 Ich wurde aber neulich ganz und gar unverhofft zu einen eleganten Ausdruck für die Summe dieser Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{ etc}$$

geführt worden, der von der Quadratur des Kreises abhängt, so dass, wenn man die wahre Summe dieser Reihe hätte, daher zugleich die Quadratur des Kreises folgen würde. Ich habe nämlich das Sechsfache der Summe dieser Reihe dem Quadrat der Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist, gleich zu sein gefunden oder, nachdem die Summe dieser Reihe $= s$ gesetzt worden ist, wird $\sqrt{6s}$ zu 1 das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser haben. Ich habe aber neulich gezeigt, dass die Summe dieser Reihe näherungsweise ist

$$1,6449340668482264364$$

wenn aus dem Sechsfachen dieser Zahl die Quadratwurzel gezogen wird, geht in der Tat diese Zahl hervor

$$3,141592653589793238$$

die die Peripherie des Kreises ausdrückt, dessen Durchmesser 1 ist. Diesen Spuren, mit denen ich diese Summe erhalten habe, weiter folgend habe ich entdeckt, dass auch die Summe dieser Reihe

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \text{ etc.}$$

auch von der Quadratur des Kreises abhängt. Denn ihre Summe gibt mit 90 multipliziert das Biquadrat der Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist. Und auf die gleiche Wiese konnte ich auch die Summen der folgenden Reihen, in denen die Exponenten der Potenzen gerade Zahlen sind, bestimmen.

§3 Damit ich also am bequemsten zeige, wie ich diese Dinge erhalten habe, werde ich die ganze Sache, in der Reihenfolge, die ich selbst benutzt habe, dargelegen. Im um das Zentrum C mit dem Radius AC oder $BC = 1$ beschriebenen Kreis (Abbildung 1) AMBNA habe ich irgendeinen Bogen AM betrachtet, dessen Sinus MP ist, der Kosinus hingegen CP. Nachdem nun der

Bogen $AM = s$, der Sinus $Pm = y$ und der Kosinus $CP = \chi$ gesetzt worden ist, können wir durch die schon hinreichend bekannte Methode so der Sinus y wie der Kosinus χ aus dem gegebenen Bogen s durch Reihen bestimmt werden; es ist nämlich, wie überall sehen lässt,

$$y = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{etc}$$

und

$$\chi = s - \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{s^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc}$$

Aus der Betrachtung dieser Gleichungen natürlich bin ich zu den Summen der oben erwähnten reziproken Reihen gelangt; jede der beiden dieser Gleichungen wird freilich fast auf dasselbe Ziel gerichtet, und dieser Sache wegen wird es genügen, nur die eine auf die Weise, welche ich darlegen werde, behandelt zu haben.

§4 Die erste Gleichung also

$$y = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{etc}$$

drückt die Relation zwischen Bogen und Sinus aus. Daher wird aus ihr so aus dem gegebenen Bogen sein Sinus wie aus dem gegebenen Sinus sein Bogen bestimmt werden können. Ich betrachte aber den Sinus y als gegeben und untersuchen, wie der Bogen s aus y gefunden werden muss. Hier ist aber vor Allem zu bemerken, dass demselben Sinus y unzählige Bogen entsprechen, welche unzählige Bogen daher die vorgelegte Gleichung liefern müssen wird. Wenn freilich in dieser Gleichung s als Unbekannte betrachtet wird, hat sie unendlich viele Dimensionen und daher ist es nicht verwunderlich, wenn diese Gleichung unendlich viele einfache Faktoren enthält, von denen jeder gleich Null gesetzt einen geeigneten Wert für s geben muss.

§5 Wie aber, wenn alle Faktoren dieser Gleichung bekannt wären, würden auch alle Wurzeln jener oder die Werte von s bekannt werden, so wird man umgekehrt, wenn alle Werte von s angegeben werden können, dann auch alle Faktoren selbst haben. Damit ich aber umso besser so über die Wurzeln wie die Faktoren urteilen kann, verwandle ich die vorgelegte Gleichung in diese Form:

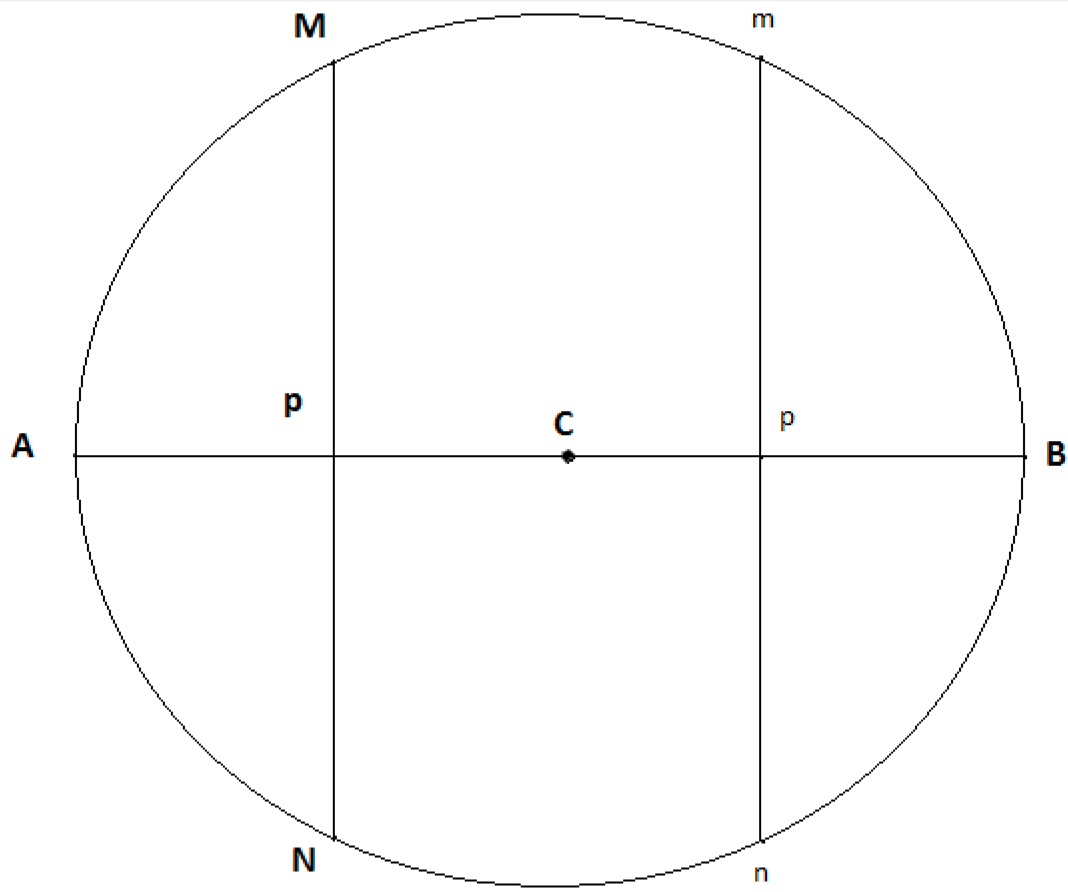

Abbildung 1:

$$0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3y} - \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y} + \text{etc}$$

Wenn nun alle Wurzeln dieser Gleichung oder alle Bogen, die denselben Sinus y haben, A,B,C,D,E etc waren, dann werden auch alle diese Größen Faktoren sein

$$1 - \frac{s}{A},\ 1 - \frac{s}{B},\ 1 - \frac{s}{C},\ 1 - \frac{s}{D} \text{ etc}$$

Deswegen wird sein

$$1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3y} - \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y} + etc\ = (1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D}) \text{ etc}$$

§6 Aus der Natur und der Auflösung von Gleichungen ist aber bekannt, dass der Koeffizient des Termes, in dem s enthalten ist, oder $\frac{1}{y}$ gleich der Summe aller Koeffizienten von s in den Faktoren ist oder

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{etc}$$

Darauf ist der Koeffizient von s^2, der wegen in der Gleichung fehlenden Terms $= 0$ ist, gleich dem Aggregat der Produkte aus je zwei Termen der Reihe $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Weiter wird $-\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3y}$ gleich dem Aggregat der Produkte aus je drei Termen der Reihe $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ sein. Und auf die gleiche Weise wird $0 =$ dem Aggregat der Produkte aus je vier Termen derselben Reihe sein und $+\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y} =$ Aggregat der Produkte aus je fünf Termen dieser Reihe, und so weiter.

§7 Nachdem aber der kleinste Bogen $AM = A$, dessen Sinus $PM = y$ ist, und die halbe Peripherie des Kreises $= p$ gesetzt worden sind, werden

A, p-A, 2p+A, 3p-A, 4p+A, 5p-A, 6p+A etc

genauso

-p-A, -2p+A, -3p-A, -4p+A, -5p-A etc

alle Bogen sein, die denselben Sinus y haben. Welche Reihe wir also zuvor angenommen haben

$$\frac{1}{A},\ \frac{1}{B},\ \frac{1}{C},\ \frac{1}{D} \text{ etc}$$

wird in diese verwandelt

$$\frac{1}{A},\ \frac{1}{p-A},\ \frac{1}{-p-A},\ \frac{1}{2p+A},\ \frac{1}{-2p+A},\ \frac{1}{3p-A},\ \frac{1}{-3p-A},\ \frac{1}{4p+A},\ \frac{1}{-4p+A},\ \text{etc.}$$

Die Summe all dieser Terme ist also $= \frac{1}{y}$, die Summe der Produkte aus je zwei Termen dieser Reihe ist aber gleich 0, die Summe der Produkte aus je dreien $= \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3y}$, die Summe der Produkte aus je vieren $= 0$, die Summe der Produkte aus je fünfen$= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y}$, die Summe der Faktoren aus je sechsen $= 0$. Und so weiter.

§8 Wenn man aber irgendeine Reihe hat

$$a+b+c+d+e+f+\text{ etc}$$

deren Summe α sei, die Summe der Produkte aus je zwei Termen $= \beta$, die Summe der Produkte aus je dreien γ, die Summe der Produkte aus je vieren $= \delta$ etc, wird die Summe der Quadrate der einzelnen Terme sein

$$a^2+b^2+c^2+d^2+etc\ = \alpha^2 - 2\beta$$

die Summe der Kuben hingegen

$$a^3+b^3+c^3+d^3+etc\ = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma$$

die Summe der Biquadrate

$$= \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\delta$$

Damit aber besser klar wird, wie diese Formeln fortschreiten, wollen wir festlegen, dass die Summe der Terme a,b,c,d etc selbst $= P$ ist, die Summe der Quadrate $= Q$, die Summe der Kuben $= R$, die Summe der Biquadrate $= S$, die Summe der fünften Potenzen $= T$, die Summe der sechsten $= V$ etc. Nach Festlegen dieser wird sein:

$$P=\alpha,\ Q=P\alpha-2\beta,\ R=Q\alpha-P\beta+3\gamma,\ S=R\alpha-Q\beta+P\gamma-4\delta,$$
$$T=S\alpha-R\beta+Q\gamma-P\delta+5\epsilon\text{ etc}$$

§9 Weil also in unserem Fall der Reihe

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{p-A}, \frac{1}{-p-A}, \frac{1}{2p+A}, \frac{1}{-2p+A}, \frac{1}{3p-A}, \frac{1}{-3p-A}, \text{etc}$$

die Summe aller Terme oder $\alpha = \frac{1}{y}$ ist, die Summe der Produkte aus je zweien oder $\beta = 0$ und weiter

$$\gamma = \frac{-1}{1 \cdot 2 \cdot 3y}, \delta = 0, \epsilon = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y}, \zeta = 0 \text{ etc.}$$

wird die Summe jener Terme selbst sein

$$P = \frac{1}{y}$$

die Summe der Quadrate jener Terme

$$Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2}$$

die Summe der Kuben jener Terme

$$R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1 \cdot 2y}$$

die Summe der Biquadrate

$$S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1 \cdot 2 \cdot 3y}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \frac{S}{y} - \frac{Q}{1 \cdot 2 \cdot 3y} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4y} \\ \mathrm{V} &= \frac{T}{y} - \frac{R}{1 \cdot 2 \cdot 3y} + \frac{P}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y} \\ \mathrm{W} &= \frac{V}{y} - \frac{S}{1 \cdot 2 \cdot 3y} + \frac{Q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6y} \end{aligned}$$

Aus diesem Bildungsgesetz werden leicht die Summen der höheren Potenzen bestimmt.

§10 Wir wollen nun den Sinus $PM = y$ gleich dem Radius setzen, dass $y = 1$ ist, es wird der kleinste Bogen A, dessen Sinus A ist, der vierte Teil der Peripherie sein, $= \frac{1}{2}p$, oder während q den vierten Teil der Peripherie bezeichnet, wird $A = q$ und $p = 2q$ sein. Die obere Reihe wird also in diese übergehen:

$$\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, -\frac{1}{3q}, -\frac{1}{3q}, \frac{1}{5q}, \frac{1}{5q}, -\frac{1}{7q}, -\frac{1}{7q}, \frac{1}{9q}, \frac{1}{9q}, \text{etc}$$

während je zwei Terme gleich sind. Die Summe dieser Terme, die ist

$$\frac{2}{q}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc})$$

ist also gleich $P = 1$. Daher entspringt also

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + etc \;= \frac{q}{2} = \frac{p}{4}$$

Das Vierfache dieser Reihe wird also der halben Peripherie des Kreises gleich, dessen Radius 1 ist, oder der Peripherie des ganzen Kreises, dessen Durchmesser 1 ist. Und dies ist die schon vor langer Zeit von Leibniz hervorgebrachte Reihe selbst, mit welcher er die Quadratur des Kreises bestimmt hat. Daher tritt eine große Stütze dieser Methode, wenn sie jemandem unter Umständen nicht hinreichend sicher scheint, hervor; sodass sich über die übrigen Dinge, die aus dieser Methode abgeleitet wurden, überhaupt nicht zweifeln lässt.

§11 Wir wollen nun die Quadrate der gefundenen Terme für den Fall, in dem $y = 1$ ist, nehmen und es wird diese Reihe hervorgehen:

$$+\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \frac{1}{25q^2} + \text{etc}$$

deren Summe ist

$$\frac{2}{q^2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + etc)$$

welche also gleich $Q = P = 1$ sein muss. Daher folgt also, dass die Summe dieser Reihe

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc}$$

$= \frac{q^2}{2} = \frac{p^2}{8}$ ist, während p die ganze Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $= 1$ ist. Die Summe dieser Reihe

$$1+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{25}+\text{ etc}$$

hängt aber von dieser Summe der Reihe ab

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\text{ etc.}$$

weil diese um ihren vierten Teil vermindert jene gibt. Es ist also die Summe dieser Reihe gleich der Summe jener mit ihrem dritten Teil. Deswegen wird sein

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\tfrac{1}{36}+etc\ =\tfrac{p^2}{6}$$

und daher ist die Summe dieser Reihe mit 6 multipliziert gleich dem Quadrat der Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist, diese ist der Proposition selbst, von welcher ich anfangs eine Erwähnung gemacht habe.

§12 Weil also im Fall, in dem $y=1$ ist, $P=1$ und $Q=1$ ist, werden die Summen der übrigen Buchstaben sein wie folgt

$$R=\tfrac{1}{2},\ S=\tfrac{1}{3},\ T=\tfrac{5}{24},\ V=\tfrac{2}{15},\ W=\tfrac{61}{720},\ X=\tfrac{17}{315},\ \text{etc}$$

Weil aber die Summe der Kuben $R=\frac{1}{2}$ gleich ist, wird sein

$$\tfrac{2}{q^3}\left(1-\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{5^3}-\tfrac{1}{7^3}+\tfrac{1}{9^3}-etc\ \right)=\tfrac{1}{2}$$

Daher wird sein

$$1-\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{5^3}-\tfrac{1}{7^3}+\tfrac{1}{9^3}-etc\ =\tfrac{q^3}{4}\tfrac{p^3}{32}$$

Die Summe dieser Reihe gibt daher mit 32 multipliziert den Kubus der Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist. Auf die gleiche Weise muss die Summe der Biquadrate, die ist

$$\tfrac{2}{q^4}\left(1+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{5^4}+\tfrac{1}{7^4}+\tfrac{1}{9^4}+etc\right)$$

gleich $\frac{1}{3}$ sein und daher wird sein

$$1+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{5^4}+\tfrac{1}{7^4}+\tfrac{1}{9^4}+etc\ =\tfrac{q^4}{6}=\tfrac{p^4}{96}$$

Es ist aber diese Reihe mit $\frac{16}{15}$ multipliziert gleich dieser

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{etc}$$

daher ist diese Reihe gleich $\frac{p^4}{90}$, oder die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc}$$

gibt mit 90 multipliziert das Biquadrat der Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist.

§13 Auf die gleiche Weise werden die Summen der höheren Potenzen gefunden werden; es wird aber hervorgehen wie folgt

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - etc \ = \frac{5q^5}{48} = \frac{5p^5}{1536}$$

und

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + etc \ = \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{960}$$

Nachdem aber die Summen dieser Reihe gefunden worden ist, wird zugleich die Summe dieser Reihe erfahren werden, die sein wird

$$= \frac{p^6}{945}$$

Weiter wird für die siebten Potenzen sein

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - etc \ = \frac{61q^7}{1440} = \frac{61p^7}{184320}$$

und für die achten

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + etc \ = \frac{17q^8}{630} = \frac{17p^8}{161280}$$

woher abgeleitet wird

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + etc \ = \frac{p^8}{9450}$$

Es ist aber über diese Reihen zu bemerken, dass bei den Potenzen ungerader Exponenten die Vorzeichen der Terme alternieren, für die geraden hingegen gleich sind; und der Grund liegt darin, dass die Summe von dieser allgemeinen Reihe

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc}$$

nur in den Fällen dargeboten werden kann, in denen n eine ungerade Zahl ist. Außerdem ist auch anzumerken, wenn der allgemeine Term der Reihe 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{61}{720}$, $\frac{17}{315}$, etc, welche Werte wir für die Buchstaben P, Q, R, S etc gefunden haben, angegeben werden könnte, dass daher die Quadratur des Kreises dargeboten werden würde.

§14 Bei diesen haben wir den Sinus PM gleich dem Radius festgelegt, wir wollen also sehen, welche Reihen hervorgehen, wenn y andere Werte zugeteilt werden. Es sei also $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, welchem Sinus der kleinste Bogen $\frac{1}{4}p$ entspricht. Nachdem also $A = \frac{1}{4}p$ gesetzt worden ist, wird die Reihe der einfachen Terme oder der ersten Potenz diese sein

$$\frac{4}{p} + \frac{4}{3p} - \frac{4}{5p} - \frac{4}{7p} + \frac{4}{9p} + \frac{4}{11p} - \text{etc}$$

die Summe P welcher Reihe gleich $\frac{1}{y} = \sqrt{2}$ ist. Man wird also haben

$$\frac{p}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc}$$

welche Reihe sich nur in Bezug auf die Vorzeichen von der Leibniz'schen unterscheidet und von Newton schon längst zum Vorschein gebracht worden ist. Die Summe der Quadrate jener Terme hingegen, natürlich

$$\frac{16}{p^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc}\right)$$

ist gleich Q=2. Es wird also sein

$$1 + \frac{1}{9}) + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + etc \ = \frac{p^2}{8}$$

wie schon zuvor gefunden worden ist.

§15 Wenn $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ wird, wird der kleinste diesem Sinus entsprechende Bogen 60° und daher $A = \frac{1}{3}p$ sein. In diesem Fall wird also die folgende Reihe der Terme hervorgehen

$$\frac{3}{p} + \frac{3}{2p} - \frac{3}{4p} - \frac{3}{5p} + \frac{3}{7p} + \frac{3}{8p} - \text{etc}$$

die Summe welcher Terme gleich $\frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ist. Man wird also haben

$$\frac{2p}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{ etc}$$

Die Summe der Quadrate jener Terme ist hingegen $= \frac{1}{y^2} = \frac{4}{3}$; daher folgt, dass sein wird

$$\frac{4p^2}{27} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \text{ etc}$$

in welcher Reihe die die Zahl 3 als Faktor involvierenden Terme fehlen. Es hängt aber diese Reihe auch von dieser ab

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{ etc}$$

deren Summe $= \frac{p^2}{6}$ gefunden worden war, denn wenn diese Reihe um ihren neunten Teil vermindert wird, geht die obere Reihe hervor, deren Summe daher $= \frac{p^2}{6}(1 - \frac{1}{9}) = \frac{4pp}{27}$ sein muss. Auf die gleiche Weise, wenn andere Sinus angenommen werden, werden andere Reihen hervorgehen, so der einfachen wie der der Quadrate oder höheren Potenzen der Terme, deren Summe die Quadratur des Kreises involvieren.

§16 Aber wenn $y = 0$ gesetzt wird, werden wegen des in den Nenner gesetzten y oder wegen der durch y geteilten Anfangsgleichung Reihen dieser Art nicht weiter angegeben werden können, weil diese die Reihen selbst sind

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{ etc.}$$

wenn n eine gerade Zahl ist, wende ich, eine die Summen von diesen Reihen fern davon in diesem Fall zu finden sind, in dem y=0 ist, ableiten. Nachdem aber $y = 0$ gesetzt wurde, geht die fundamentale Gleichung in diese über:

$$0 = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ etc}$$

die Wurzeln welcher Gleichung alle Bogen geben, deren Sinus $= 0$ ist. Es ist aber eine und die kleinste Wurzel $s = 0$, woher die Gleichung durch s dividiert alle übrigen Bogen darbieten wird, deren Sinus $= 0$ ist, welche Bogen daher die Wurzeln dieser Gleichung sein werden

$$0 = 1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ etc}$$

Aber die Bogen selbst, deren Sinus$= 0$ ist, sind p, -p, 2p, -2p, 3p, -3p, etc

von je zweien von welchen die eine das Negative des anderen ist, was auch die Gleichung selbst wegen der nur geraden Dimensionen von s aufzeigt. Daher werden die Divisionen jener Gleichung sein,

$$1-\frac{s}{p}, 1+\frac{s}{p}, 1-\frac{s}{2p}, 1+\frac{s}{2p}, \text{ etc.}$$

und durch Verbinden je zweier dieser Divisionen wird sein

$$1-\frac{s^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{s^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{s^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\text{ etc}$$
$$=(1-\frac{s^2}{p^2})(1-\frac{s^2}{4p^2})(1-\frac{s^2}{9p^2})(1-\frac{s^2}{16p^2})etc$$

§17 Es ist nun offenbar, dass aus der Natur der Gleichungen der Koeffizient von ss oder $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$ dieser Reihe gleich sein wird

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{9p^2}+\frac{1}{16p^2}+\text{ etc}$$

Die Summe der Produkte aus je zwei Termen dieser Reihe wird hingegen $=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$ sein und die Summe der Produkte aus je dreien $=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$ etc. Dieser Sache wegen wird gemäß §8 sein

$$\alpha=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}, \beta=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}, \gamma=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\text{ etc}$$

und nachdem die Summe der Terme durch P gesetzt worden ist

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{9p^2}+\frac{1}{16p^2}+etc\ \ =P$$

und die Summe der Quadrate derselben Terme $=Q$, die Summe der Kuben $=R$, die Summe der Biquadrate $=S$ etc, wird durch §8 sein

$$\begin{aligned}
\text{P} &= \alpha = \frac{1}{1*2*3} = \frac{1}{6}\\
\text{Q} &= P\alpha - 2\beta = \frac{1}{90}\\
\text{R} &= Q\alpha - P\beta + 3\gamma = \frac{1}{945}\\
\text{S} &= R\alpha - C\beta + P\gamma - 4\delta = \frac{1}{9450}\\
\text{T} &= S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\epsilon = \frac{1}{93555}\\
\text{V} &= T\alpha - S\beta + R\gamma - O\delta + P\epsilon = \frac{691}{6825*93555}\\
&\text{etc}
\end{aligned}$$

§18 Aus diesen werden also die folgenden Summen abgeleitet

$$\begin{array}{lll}
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+etc & =\frac{p^2}{6} & =P' \\
1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+etc & =\frac{p^4}{90} & =Q' \\
1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+etc & =\frac{p^6}{945} & =R' \\
1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+etc & =\frac{p^8}{9450} & =S' \\
1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+etc & =\frac{p^{10}}{93555} & =T' \\
1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+etc & =\frac{691p^{12}}{6825\cdot 93555} & =V' \\
\text{etc} & &
\end{array}$$

welche Reihen aus dem gegebenen Bildungsgesetzt dennoch mit viel Arbeit zu höheren Potenzen fortgesetzt werden können. Indem aber die einzelnen Reihen durch die vorhergehenden geteilt werden, werden die folgenden Gleichungen entspringen:

$$p^2 = 6P' = \frac{15Q'}{P'} = \frac{21R'}{2Q'} = \frac{10S'}{R'} = \frac{99T'}{10S'} = \frac{6825V'}{691T'} \text{ etc.}$$

welchen einzelnen Ausdrücken die Quadratur der Peripherie des Kreises des Durchmesser 1 ist, gleich wird.

§19 Während aber die Summen dieser Reihen, auch wenn sie in der Tat näherungsweise leicht dargeboten werden können, dennoch nicht viel an Hilfe verschaffen können, um die Peripherie des Kreises in der Tat näherungsweise auszudrücken, wegen der Quadratwurzel, die gezogen werden müsste, werden wir aus den ersten Reihen Ausdrücke finden, die der Peripherie P gleich sind. Es wir aber hervorgehen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
P &= 4(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + etc.)\\
P &= 2 * \frac{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc.}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc.}\\
P &= 4 * \frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+etc.}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc.}\\
P &= 3 * \frac{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+etc.}{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+etc.}\\
P &= \frac{16}{5} * \frac{1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{11^5}+etc.}{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+etc.}\\
P &= \frac{25}{8} * \frac{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\frac{1}{11^6}+etc.}{1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{11^5}+etc.}\\
P &= \frac{192}{61} * \frac{1-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}-\frac{1}{11^7}+etc.}{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\frac{1}{11^6}+etc.}
\end{aligned}
$$